Top

Left side

TEST

Right side

Bottom

las lecciones en pdf están en:

https://www.physics.umd.edu/rgroups/amo/orozco/results/2023/Results23.htm

Correlaciones en óptica y en óptica cuántica: Una serie de lecciones a cerca de correlaciones y coherancia Junio 2023

Luis A. Orozco

www.jqi.umd.edu

Universidad de Concepción

Lista tentativa de tópicos a tratar:

- De la estadística y el algebra lineal a la densidad espectral de potencia.
- Perspectiva histórica y ejemplos en varias areas de física.
- Funciones de correlación en optica clásica
- La relación entre correlación y la coherencia.
- Funciones de correlación en óptica cuántica.
- Correlaciones y dinámica condicional para control.
- Correlaciones del campo y la intensidad en óptica cuántica.
- Correlaciones en electrodinámica cuántica de cavidades.

Lección 1

- Piensen en los datos como vectores columna o vectores, de modo que su media sea cero.
- Cada punto es (x_i) (x_i,y_i)
- Podemos utilizar algebra lineal.

Correlación de un conjunto de datos:

- Piense en los datos como un vector columna y suponga que cada punto es $x_i = \bar{x} + \delta x_i$

- Calcular la varianza de los datos

- $Var(x) = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum(\bar{x} + \delta x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum(\delta x_i)^2}{N}$

- El promedio del cuadrado de desviaciones de la media

- El producto interno del vector consigo mismo, es proporcional a la varianza.

- La correlación es el producto interno normalizado (PI).

- $\mathrm{PI}(x) = \sum(\bar{x} + \delta x_i)(\bar{x} + \delta x_i) = N\bar{x}^2 + 2\,\bar{x}\sum\delta x_i + \sum(\delta x_i)^2$

- Si la media es cero, el PI es la varianza.

Correlación de un conjunto de datos:

- Piense en los datos como vectores de dos columnas, de modo que su media es cero.
- Cada punto es (x_i,y_i)
- La función de correlación C es el producto interno de los dos vectores normalizados por la norma de los vectores..

$$C = \frac{\sum_i x_i y_i}{\left(\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2\right)^{1/2}} = \frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \vec{X} \bullet \vec{Y}$$

If $y_i = mx_i$ (Suponiendo que la media de x es cero y la media de y es cero)

$$C = \frac{\sum_i x_i y_i}{\left(\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2\right)^{1/2}} = \frac{\sum_i x_i m x_i}{\left(\sum_i x_i^2 \sum_i m^2 x_i^2\right)^{1/2}}$$

$$C = \frac{m \sum_i x_i^2}{\left(m^2 \sum_i x_i^2 \sum_i x_i^2\right)^{1/2}} = \frac{m\vec{x} \bullet \vec{x}}{|m||\vec{x}||\vec{x}|} = \pm 1$$

C adquiere los valores extremos

C es el producto interno entre el vector de datos de salida (y) y el valor de la función esperada (ajuste) (f(x)) con los datos de entrada (x)

$$C = \frac{\sum_i f(x_i) y_i}{\left(\sum_i f(x_i)^2 \sum_i y_i^2 \right)^{1/2}} = \frac{\vec{f} \bullet \vec{y}}{\left|\vec{f}\right| \left|\vec{y}\right|} = \vec{F} \bullet \vec{Y}$$

No hay ninguna referencia a barras de error o incertidumbres en los puntos de datos

Este coeficiente de correlación puede ser entre dos mediciones o una medición y una predicción...

- *C* está acotado : $-1<C+1$
- *C* es *cos*(ϕ) dónde ϕ está en un espacio abstracto.
- ¡La correlación no implica causalidad!

Piense en sus datos como vectores, puede ser muy útil.

Las correlaciones no se limitan a un solo punto espacial o temporal.

En funciones continuas, como una serie temporal, la correlación depende de la diferencia entre los dos tiempos de comparación.

La correlación puede depender de la distancia real, la distancia angular o de cualquier otro parámetro que caracterice una

Ajuste por mínimos cuadrados

Minimizar la autocorrelación de la diferencia entre el valor observado x_i y el valor esperado $f(x_i)$ dividido por el error estadístico en el valor observado e_i.
El producto interno es

$$\chi^2 = \sum \frac{(y_i - f(x_i))^2}{e_i^2} = GDL$$

Si las diferencia son aleatorias, entonces su distribución deben ser gaussiana, como los errores estadísticos tambien lo son, la suma debe ser GDL

$$\chi^2_{red} = \frac{\chi^2}{GDL}$$

con varianza

$$Var(\chi^2_{red}) = \frac{2}{GDL}$$

$$\chi^2_{red} = \frac{\chi^2}{GDL} \pm \sqrt{\frac{2}{GDL}}$$

El problema de mínimos cuadrados se puede formular en algebra lineal a cómo encontrar la mejor solución a un conjunto de m ecuaciones que tiene sólo n variables (m>n), más filas que columnas.

ver e. g.: Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra Ch. 4

1 Solving $\boxed{A^{\mathrm{T}}A\widehat{\boldsymbol{x}} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}$ gives the projection $\boldsymbol{p} = A\widehat{\boldsymbol{x}}$ of $\boldsymbol{b}$ onto the column space of A.

2 When $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has no solution, $\widehat{\boldsymbol{x}}$ is the "least-squares solution": $\|\boldsymbol{b} - A\widehat{\boldsymbol{x}}\|^2 =$ minimum.

3 Setting partial derivatives of $E = \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$ to zero $\left(\frac{\partial E}{\partial x_i} = 0\right)$ also produces $A^{\mathrm{T}}A\widehat{\boldsymbol{x}} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$.

4 To fit points $(t_1, b_1), \ldots, (t_m, b_m)$ by a straight line, A has columns $(1, \ldots, 1)$ and $(t_1, \ldots, t_m)$.

5 In that case $A^{\mathrm{T}}A$ is the 2 by 2 matrix $\begin{bmatrix} m & \Sigma\, t_i \\ \Sigma\, t_i & \Sigma\, t_i^2 \end{bmatrix}$ and $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ is the vector $\begin{bmatrix} \Sigma\, b_i \\ \Sigma\, t_i b_i \end{bmatrix}$.

Más allá de índices iguales (tiempo, posición, ...)

Correlación cruzada (dos funciones)
Autocorrelación (misma función)

C(n)= $$(f \star g)[n] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f^*[m]\, g[m+n].$$

C(τ)= $$(f \star g)(\tau) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)\, g(t+\tau)\, dt,$$

Se asemeja a la convolución entre dos funciones

Algunas propiedades matemáticas (hay generalizaciones a matrices).

La correlación de f(t) y g(t) es equivalente a la convolución de f*(-t) y g(t)

$$f \star g = f^*(-t) * g = f^* * g(-t).$$

Si f es hermítica, entonces la correlación y la convolución son las mismas.

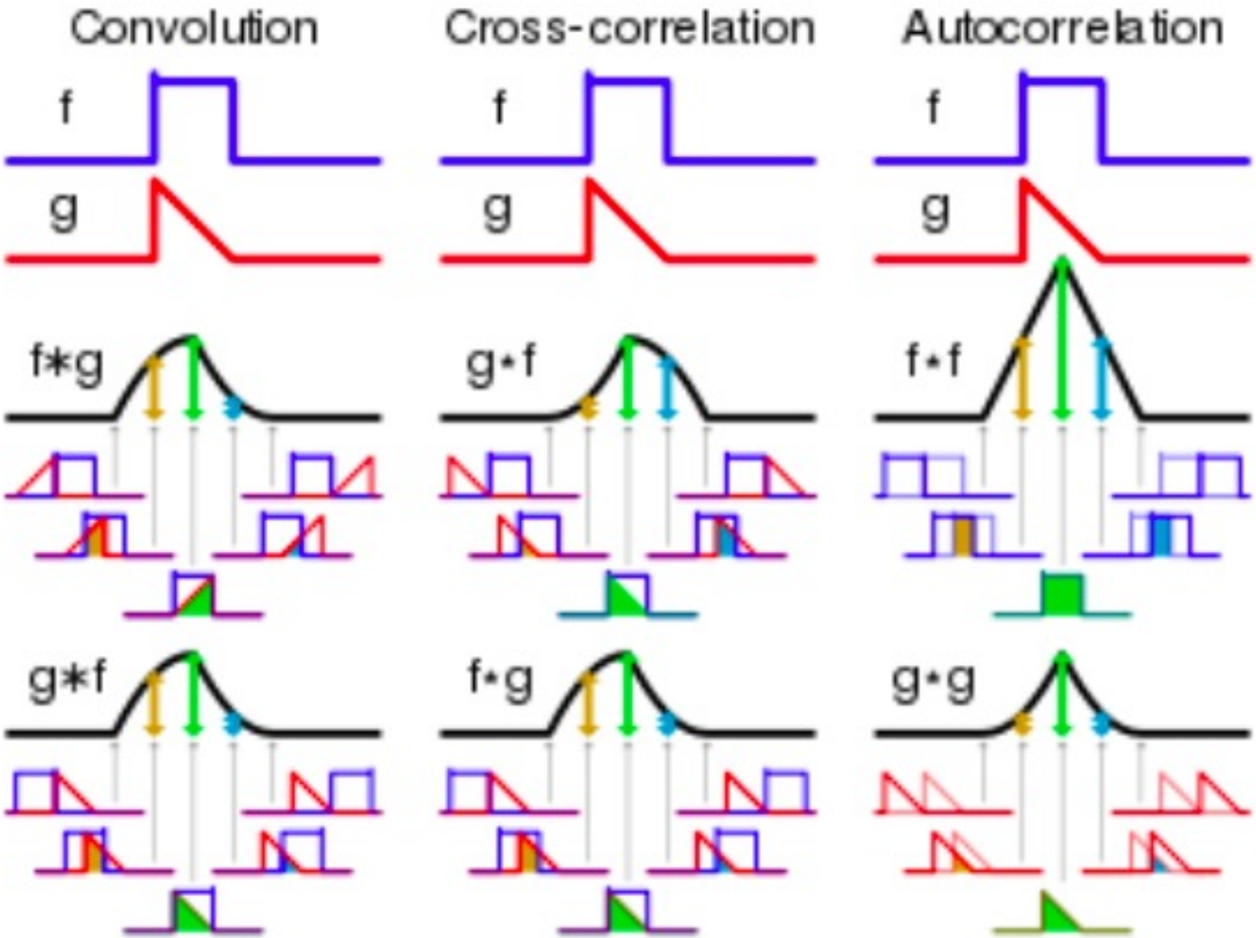
$$f \star g = f * g.$$

Si ambas son hermíticas entonces:

$$f \star g = g \star f.$$

Al igual que la convolución, la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{f \star g\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}^*$$


Convolution
Cross-correlation
Autocorrelation
f
g
f∗g
g∗f
g⋆f
f⋆g
f⋆f
g⋆g

La función de correlación contiene la operacion de suma; promedio, y se podría pensar en ella como un monento de una distribución:

$$C(\tau)=<x(t)x(t+\tau)>$$

Donde la densidad de probabilidad tiene que satisfacer las propiedades de positividad, integral igual a uno...

Ruido

Una nota de Einstein:
Método para la determinación de los valores estadísticos de las observaciones relativas a las cantidades sometidas a fluctuaciones irregulares.

Printed version of a lecture delivered on 28 February 1914 to a meeting of the Société suisse de physique in Basel.

PUBLISHED 15 March 1914

IN: *Archives des sciences physiques et naturelles* 37 (1914): 254–256.

A. Einstein (Zurich). — *Méthode pour la détermination de valeurs statistiques d'observations concernant des grandeurs soumises à des fluctuations irrégulières.* [1]

Supposons que la quantité $y = F(t)$ (par exemple le nombre des taches solaires), soit déterminée empiriquement en fonction du temps, pour un intervalle très grand, T. Comment peut-on représenter l'allure statistique de y?

Une réponse à cette question, suggérée par la théorie du rayonnement, est la suivante.

On suppose y développé en série de Fourier : [2]

$$y = F(t) = \sum A_n \cos \pi n \frac{t}{T}$$

Les cœfficients successifs A_n du développement seront, en grandeur et en signe, très différent les uns des autres et se succèderont de façon irrégulière. Mais si l'on forme la valeur moyenne $\overline{A^2_n}$ de A^2_n pour un intervalle Δn de n très grand, mais cependant suffisamment petit pour que $\frac{\pi \Delta n}{T}$ soit très petit, cette valeur moyenne sera une fonction continue de n.

Nous l'appellerons l'*intensité* I de y correspondant à n. L'intensité ainsi définie aura une période $\theta = \frac{T}{n}$; nous la désignerons par I (θ); le problème consiste à la déterminer.

[3] Un calcul simple donne :

$$I(\theta) = \overline{A^2_n} = \frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^T F(t)F(n) \,.\, \cos \pi n \,\frac{t-n}{T}\, dndt$$

Il suit de là que la fonction I cherchée peut être déterminée, à un facteur numérique près, par la règle suivante :

On choisit un intervalle de temps Δ et on forme la valeur moyenne :

$$\mathfrak{M}(\Delta) = \overline{F(t)F(t + \Delta)} \tag{1}$$

qui, pour la courbe donnée y, est une fonction caractéristique de Δ. Cette courbe tendra, pour de grandes valeurs de Δ, vers une limite, que l'on pourra rendre nulle par une translation convenable de l'axe des abcisses (axe des t et axe des Δ). Alors on a :

[4] (2)
$$I(\theta) = \int_0^\infty \mathfrak{M}(\Delta) \cos \pi \frac{\Delta}{\theta}\, d\Delta$$

Pour effectuer l'intégration indiquée en (2), on connaît déjà des dispositifs mécaniques. Mon ami, M. P. Habicht, m'a montré en outre que la détermination des moyennes de (1) peuvent se faire aisément à l'aide d'un intégrateur mécanique de maniement facile. L'exécution pratique de la méthode semble donc n'offrir aucune difficulté particulière.

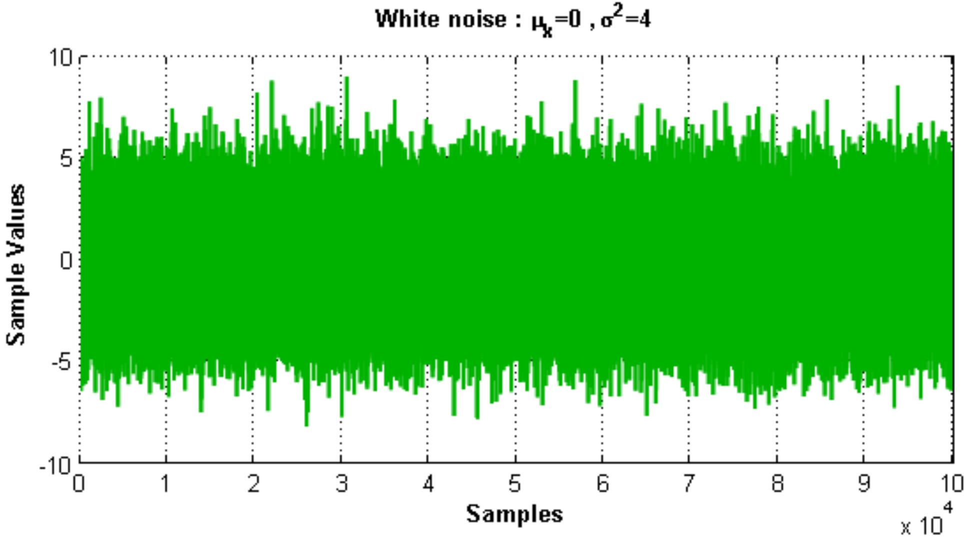
Nous ferons encore remarquer qu'un intégrateur permettant de former des moyennes du type (1), peut aussi être employé pour répondre à la question suivante : Y a-t-il ou non entre deux grandeurs F_1 et F_2 qui toutes deux sont déterminées empiriquement en fonction du temps, une relation de cause à effet? Si l'on forme en effet,

$$\mathfrak{M}(\Delta) = \overline{F_1(t) F_2(t + \Delta)}$$

M. Weiss fait remarquer combien la méthode de M. Einstein rendra de services à la météorologie très riche en matériaux qui, jusqu'à présent, étaient à peu près inutilisables.

Nos dijo que tomáramos la TF de la autocorrelación.

Si solo tienes ruido, hay problemas formales para encontrar la densidad espectral de potencia, no es una simple transformada de Fourier.



El teorema de Wiener-Khinchin-Kolmogorov dice que la densidad espectral de potencia del ruido es la transformada de Fourier de su autocorrelación.

La transformada de Fourier de *f(t)*

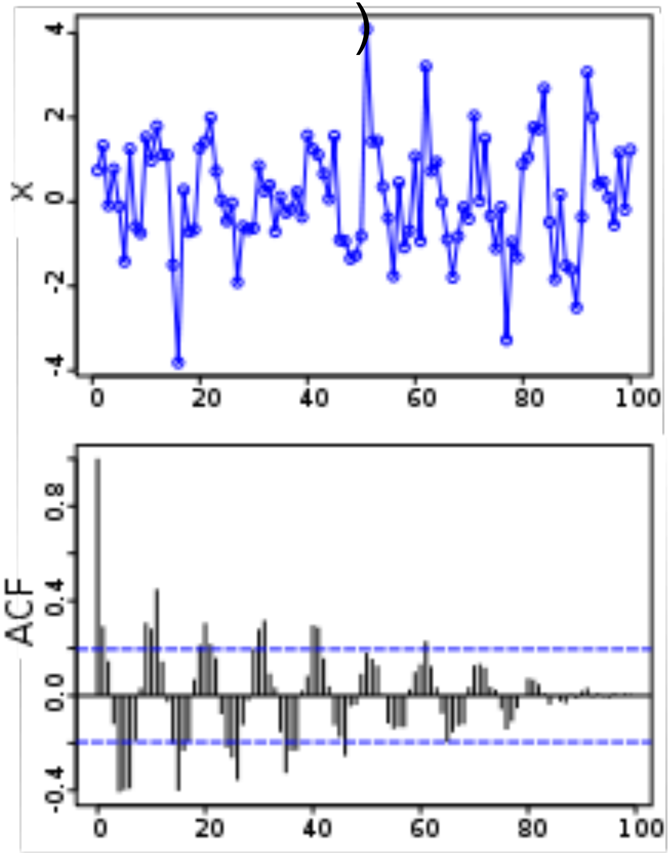
$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) e^{i\omega t}$$

La potencia a una cierta frecuencia:
La transformada de Fourier de $|g(\omega)|^2$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\omega}{2\pi} |g(\omega)|^2 e^{-i\omega t} &= \int \frac{d\omega}{2\pi} g^*(\omega) e^{-i\omega t} \int dt'\, f(t') e^{i\omega t'} \\
&= \int dt'\, f(t') \int \frac{d\omega}{2\pi} g^*(\omega) e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} \\
&= \int dt'\, f(t') \left[\int \frac{d\omega}{2\pi} g(\omega) e^{-i\omega(t'-t)} \right]^* \\
&= \int dt'\, f(t') f(t'-t)^*
\end{aligned}$$

Laseñal azul tiene una sinusoidal sólo visible en la autocorrelación (negro)

)



La correlación como filtro

Un filtro para los datos.

El vector filtro simple es todo 0 y solo k elementos 1. Alineando los dos vectores en un extremo i=j=0 a i=n y j=n obteniendo C_0
Mueva el vector de filtro sobre los datos en un i=0 j=1 a i = n y j = n + 1 asignando eso a C_1, continúe el proceso hasta llegar a C_m
C_m será la señal suavizada por un promedio de k eventos.
Es ampliamente utilizado en el procesamiento de imágenes.

Considere una imagen 1D como un vector de números

5	4	2	3	7	4	6	5	3	6

Haz un promedio con los vecinos, cuidado con los extremos. Por ejemplo, para el cuarto píxel con valor 3 lo reemplazamos con el valor (2 + 3 + 7) / 3 = 4; Para el tercer píxel reemplazamos el valor 2 con (4+2+3)/3=3

Para los extremos, repita el último valor

.	.	.	*5*	*5*	5	4	2	3	7	4	6	5	3	6	*6*	*6*	.	.	.

La correlación es entonces:

.	.	*5*	**5**	4	2	3	7	4	6	5	3	6	*6*	*6*	.	.	.

* * *

1/3	**1/3**	1/3

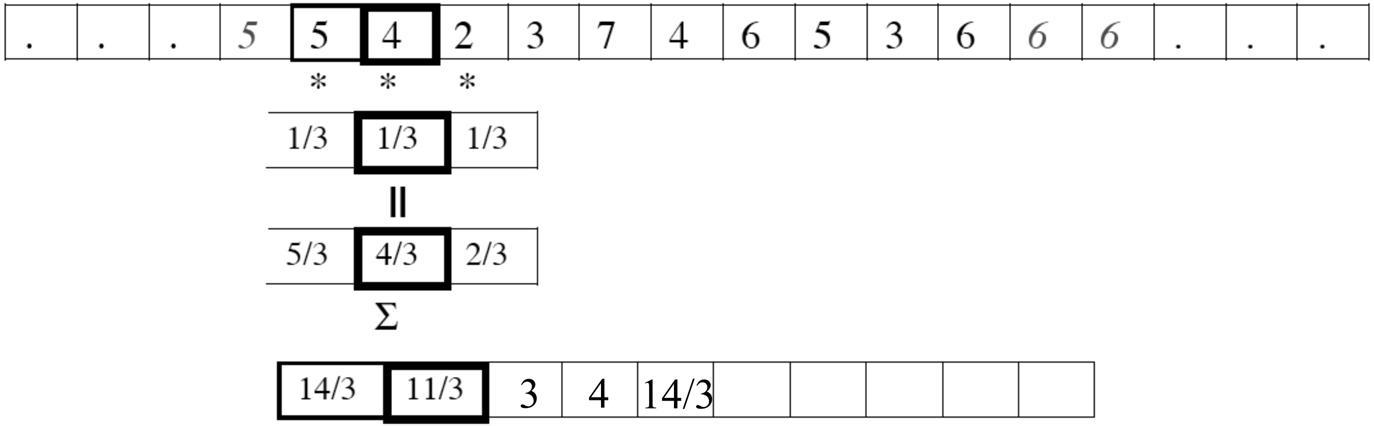
=

5/3	**5/3**	4/3

Σ

J										
	14/3									

El siguiente valor es:



Tenemos un filtro muy sencillo, pero se pueden definir otros más sofisticados incluso derivadas e integrales.

Patrón a encontrar (ignorando los extremos)

3	7	5

Series

3	2	4	1	3	8	4	0	3	8	0	7	7	7	1	2

Normalized correlation

.946	.877	.934	.73	.81	.989	.64	.59	.78	.835	.61	.931	.95	.83	.57	.988

Hay formas mucho más sofisticadas pero en principio son similares.

Otro filtro para datos.

Si conoce la forma de la señal: tome el vector de datos x_j con longitud m y calcular el producto interno con el vector de la señal si de longitud n, con $n<m$

Comience alineando los dos vectores en un extremo $i=j=0$ a $i=n$ y $j=n$ obteniendo C_0

Luego mueva el vector de señal sobre el de datos uno $i=0$ $j=1$ to $i=n$ y $j=n+1$ asignando eso a C_1, Continúe el proceso hasta llegar a C_m C_m tendrá un valor máximo cuando el patrón de señal y los datos coincidan, el ruido se promediará a cero.

- Las correlaciones pueden ser en el tiempo, en el espacio, en el ángulo, en píxeles, ...
- La correlación puede ser auto (la función consigo misma) o cruzada (dos funciones).
- Puede ser entre más de dos vectores.
- Es una herramienta única para estudiar y caracterizar ruido.

Gracias

given $\vec{y}, \vec{x}$

there may be a function (fit) such that $y_i = f(x_i)$

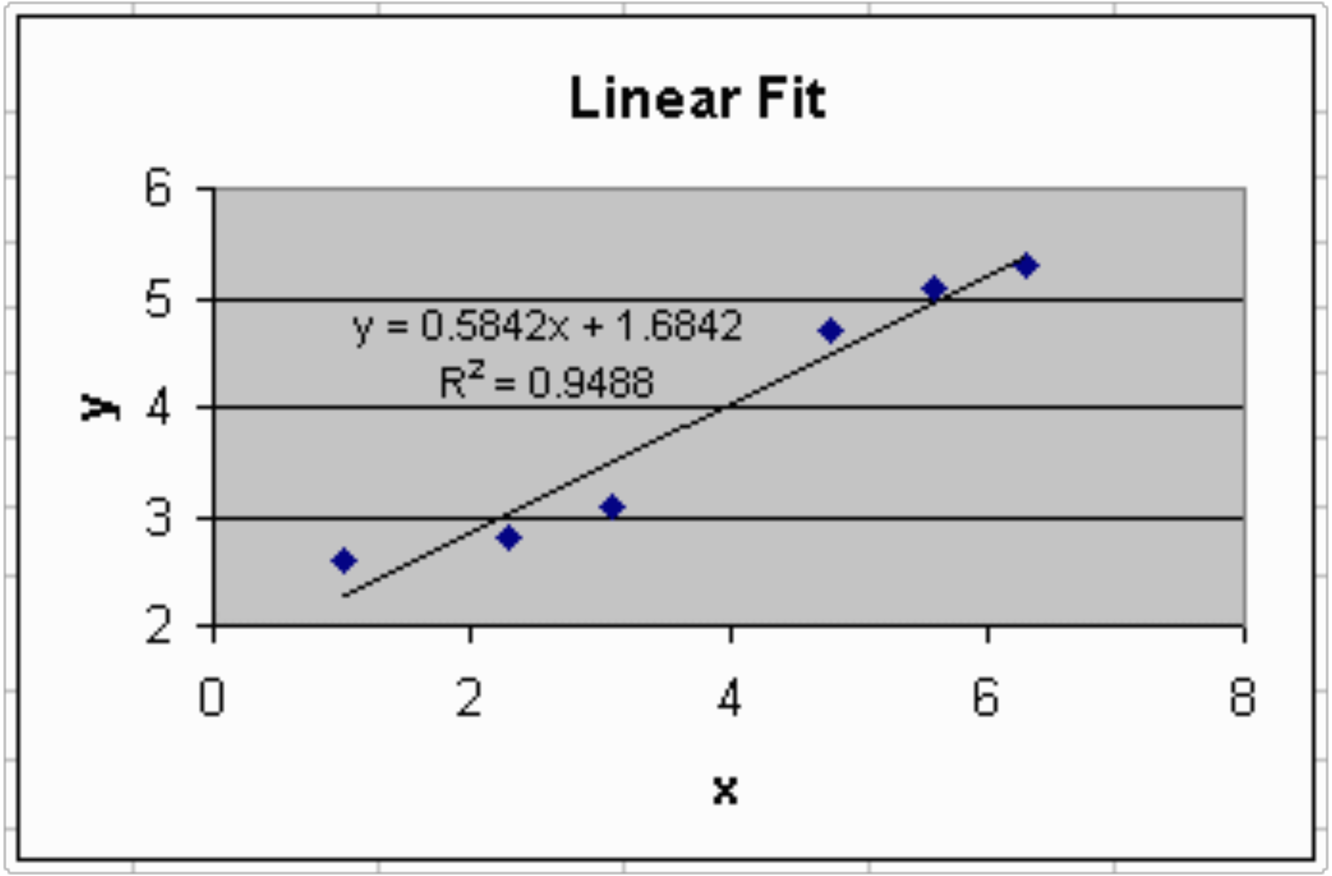
$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i,\ \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

$$Var(y) = \frac{1}{(n-1)}\sum_i (y_i - \bar{y})^2,\ Var(x) = \frac{1}{(n-1)}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

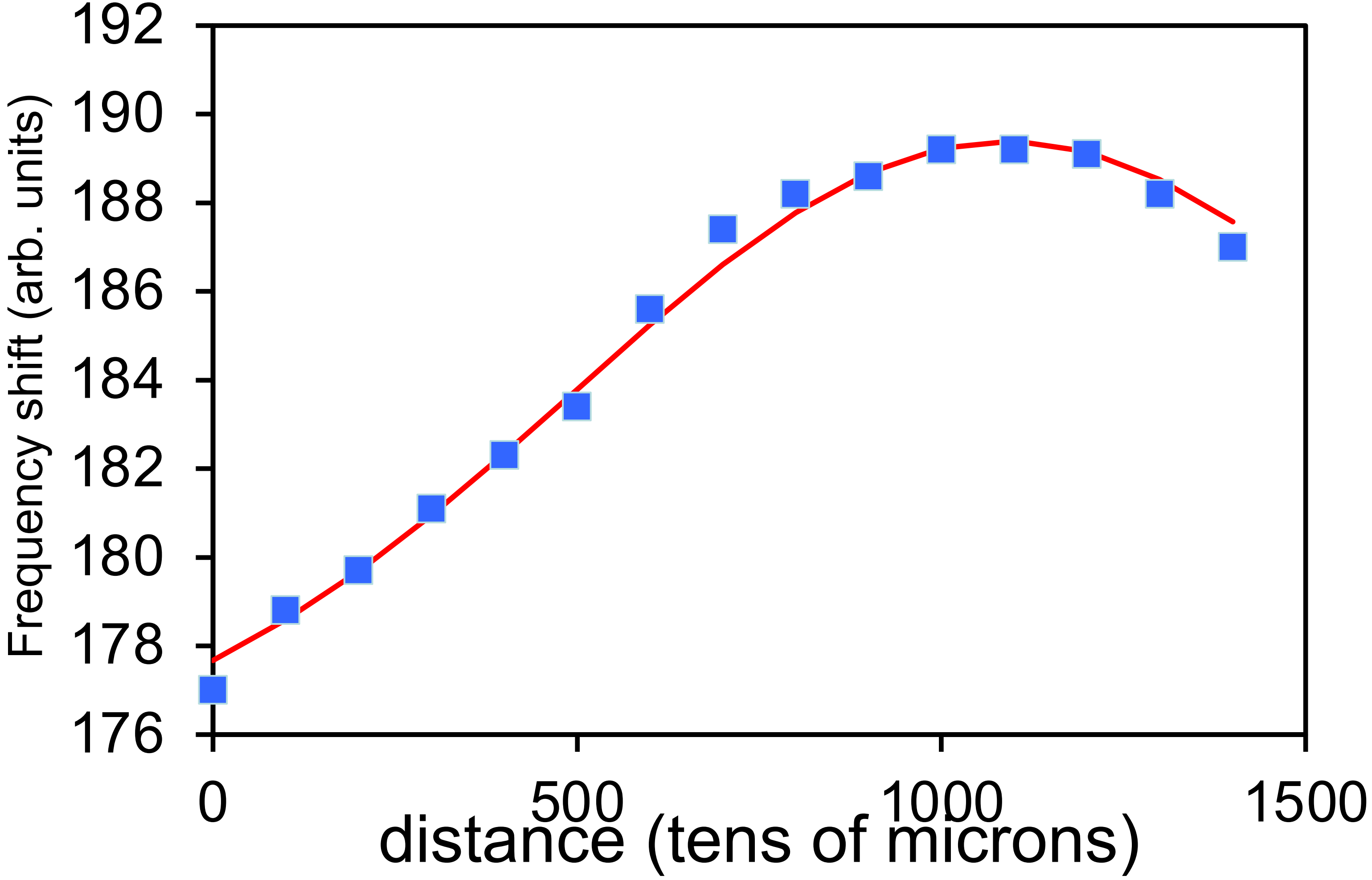
$$Var\ Exp(y) = \frac{1}{(n-1)}\sum_i (f(x_i) - \bar{y})^2$$

$$Var\ no\ Exp(y) = \frac{1}{(n-1)}\sum_i (f(x_i) - y_i)^2$$

$$C = \left(1 - \frac{Var\ no\ Exp}{Var}\right)^{1/2}$$



Correlation coefficient in this case C=R



192
190
188
186
184
182
180
178
176
Frequency shift (arb. units)
0
500
1000
1500
distance (tens of microns)

Data Vectors

X	Y	Y calc	(Y- Y calc)		XY	
0	177	177.67	-0.6736		31448.2	
100	178.8	178.59	0.20984		31931.9	
200	179.7	179.69	0.01373		32289.6	
300	181.1	180.95	0.15392		32769.3	
400	182.3	182.33	-0.0337		33239.4	
500	183.4	183.79	-0.3924		33707.5	
600	185.6	185.25	0.35335		34381.8	
700	187.4	186.61	0.79232		34970.3	
800	188.2	187.78	0.41799		35340.6	
900	188.6	188.68	-0.0818		35585.4	
1000	189.2	189.24	-0.0356		35803.4	
1100	189.2	189.4	-0.198		35834.1	
1200	189.1	189.16	-0.0552		35769.2	
1300	188.2	188.53	-0.3275		35480.9	
1400	187	187.57	-0.5665		35074.9	
			Least Squares			Correlation
∑Y^2	513552	513703	2.08244	∑YYc	513627	0.99999798